Уравнения для Рейнольдсовых напряжений скорости

Как уже отмечалось, что из-за появления в уравнениях Рейнольдса для среднего движения дополнительных членов, содержащих напряжения Рейнольдса, система этих уравнений оказывается незамкнутой. Естественно попытаться замкнуть ее, дополнив уравнения Рейнольдса новыми уравнениями, описывающими изменения во времени самих напряжений. Для вывода уравнений, описывающих изменения во времени напряжений Рейнольдса, можно воспользоваться общим методом составления уравнений для моментов. Для этого обратимся к уравнению Навье-Стокса и выразим в нем каждую актуальную величину как сумму осредненной и пульсирующей величин.

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial U_jU_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_iu_j'}{\partial x_j}+\frac{\partial U_iu_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'u_i'}{\partial x_j}=\\=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2U_i}{\partial x_j^2}+\nu\frac{\partial^2u_i'}{\partial x_j^2}\end{gathered}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_jU_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2U_i}{\partial x_j^2}-\frac{\partial\overline{u_j'u_i'}}{\partial x_j}\qquad(2)$$

Отнимая уравнение (1) с уравнения (2) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial U_iu_k'}{\partial x_k}+\frac{\partial U_ku_i'}{\partial x_k}=\\=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2u_i'}{\partial x_k^2}+\frac{\partial\overline{u_k'u_i'}}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k'u_i'}{\partial x_k}\end{gathered}\qquad(3)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_j'}{\partial t}+\frac{\partial U_ju_k'}{\partial x_k}+\frac{\partial U_ku_j'}{\partial x_k}=\\=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2u_j'}{\partial x_k^2}+\frac{\partial\overline{u_j'u_k'}}{\partial x_k}-\frac{\partial u_j'u_k'}{\partial x_k}\end{gathered}\qquad(4)$$

Теперь умножим уравнение (3) на u'_j, а уравнение (4) на u_i' и сложим

$$u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial t}+u'_j\frac{\partial U_i u'_k}{\partial x_k}+u'_j\frac{\partial U_k u'_i}{\partial x_k}+u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial t}+u'_i\frac{\partial U_j u'_k}{\partial x_k}+$$

$$+u'_i\frac{\partial U_k u'_j}{\partial x_k}=-u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_i}+u'_j\nu\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}+u'_j\frac{\partial\overline{u'_k u'_i}}{\partial x_k}-$$

$$-u'_j\frac{\partial u'_k u'_i}{\partial x_k}-u'_i\frac{\partial p'}{\partial x_j}+u'_i\nu\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}+u'_i\frac{\partial\overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k}-u'_i\frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x_k}$$

Используя простейшие преобразование

$$u'_j\frac{\partial U_i u'_k}{\partial x_k}=u'_j u'_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+u'_j U_i\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \qquad \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}=0$$

$$u'_i\frac{\partial U_j u'_k}{\partial x_k}=u'_i u'_k\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+U_j u'_i\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \qquad \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}=0$$

$$u'_j\frac{\partial U_k u'_i}{\partial x_k}+u'_i\frac{\partial U_k u'_j}{\partial x_k}=u'_j u'_i\frac{\partial U_k}{\partial x_k}+U_k u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}+$$

$$+u'_i u'_j\frac{\partial U_k}{\partial x_k}+U_k u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}=U_k u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}+U_k u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}=U_k\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}$$

$$u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_i}=\frac{\partial p' u'_j}{\partial x_i}-p'\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

$$u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_i}+u'_i\frac{\partial p'}{\partial x_j}=\frac{\partial p' u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial p' u'_i}{\partial x_j}-p'(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u'_i}{\partial x_j})$$

$$u'_j\frac{\partial u'_k u'_i}{\partial x_k}+u'_i\frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x_k}=\frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k}$$

$$u'_j\nu\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}+u'_i\nu\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}=\nu\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k^2}-2\nu\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k^2}=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k})=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}+u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_k})=$$

$$=\nu u'_i\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}+\nu\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}+\nu u'_j\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}+\nu\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}=$$

$$=\nu\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k^2}+2\nu\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

Подставив все эти выражения в уравнения получим

$$\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial t} + u'_j u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_i u'_k \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + U_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j p'}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_i p'}{\partial x_k} -$$

$$- p'(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}) = -\frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k^2} -$$

$$- 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k}$$

Осредняем последнее уравнение и используя свойство осреднения получим

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + U_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j p'}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_k} -$$

$$- \overline{p'(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_k})} = -\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

уравнений для одноточечных моментов второго порядка примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\overline{u_i u_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i u_j} = \qquad \text{(I)}$$

$$-\overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \qquad \text{(I I)}$$

$$-\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} - \qquad \text{(I I I)} \qquad (5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i u_j} - \overline{u_i u_j u_k} - \overline{\left(\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j\right)\frac{p}{\rho}}\right] + \qquad \text{(I V)}$$

$$+ 2\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \qquad \text{(V)}$$

Здесь δ_{ij} − символ Кронеккера $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$

Очевидно, что уравнения кроме средней скорости и напряжений Рейнольдса, содержит ряд новых неизвестных. Этими новыми неизвестными являются, третьи центральные моменты, умноженные на ν вторые моменты пульсаций скорости и ее пространственных производных, а так же взаимные вторые моменты полей давления и скорости. Уравнения Рейнольдса и уравнения для тензоров напряжений (5) снова не образуют замкнутой системы. Если попытаться дополнить эту систему уравнениями для новых неизвестных, входящих в (5), т.е уравнениями для третьих моментов, то в эти уравнения в свою очередь войдут многие другие дополнительные неизвестные и разность между числом неизвестных и числом уравнений станет только еще больше. Таким образом, составление уравнений для высших порядков не замыкаются ни на каком этапе, а система уравнений всегда остается открытой и не замкнутой.

Полученное уравнение (5) имеет важное значение для последующего изложения в виду чего поясним подробно физический смысл отдельных его членов. В уравнении члены (I) описывают полное изменение в единицу времени субстанции $\overline{u_i u_j}$, (II) – описывает их порождение за счет работы среднего движения против Рейнольдсовых напряжений, член с порождением не объязательно имеет тот же знак, что $\overline{u_i u_j}$, и очевидно, что $\overline{u_i u_j}$ затухает гораздо быстрее в том случае, когда знаки различны. (III) – порождение, или перераспределение между компонентами посредством пульсаций давления, и называется членом давления - деформация, поскольку это среднее произведение пульсаций давления на пульсацию скорости деформации. В общем, пульсации давления делают турбулентность изотропной, увеличивая более слабые нормальные напряжения за счет более сильных напряжений и уменьшая величину сдвиговых напряжений. (IV) – перенос пульсациями скорости $\overline{u_i u_j u_k}$ представляет перенос $\overline{u_i u_j}$ в направлении x_k по причинам, приведенным при объяснении скорости переноса количества движения $\overline{u_i u_j}$, а физическая интерпретация переноса пульсациями давления весьма затруднительна, перенос пульсациями вязкого напряжения, которые обычно малы, за исключением случая когда пространственные градиенты напряжения

Рейнольдса крайне велики. (V) – разрушение или порождение посредством пульсации вязкого напряжения. Вязкие источниковые члены в уравнениях для нормальных напряжений является отрицательными, и обеспечивают диссипацию турбулентности, также диссипативный член можно интерпретировать как среднюю скорость, с которой турбулентность совершает работу против вязких напряжений.

В дальнейшем наряду с гидродинамикой различных течений будут рассматриваться вопросы тепло-массообмена в потоках, а также температурно-неоднородные среды. Поэтому необходимо получение уравнения переноса тепла для турбулентных потоков. Что касается турбулентного переноса вещества, то полуэмпирическая теория этих процессов совпадает с аналогичной теорией процессов распространения тепла, поэтому все что будет изложено в этом разделе в одинаковой степени относится к тому и другому процессу.

В уравнении для поле скоростей определяется из уравнений движения и поэтому предполагается заданным. Таким образом, при решении тепловой задачи возникает проблема замыкания для определения четырех величин ($T, \overline{tu_i}$) имеется всего лишь одно уравнение.

Искомое уравнение теплопроводности, или уравнение баланса тепла имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} \tag{6}$$

Представляя в (6) актуальную температуру T в виде суммы осредненной $\overline{T}$ и пульсационной t температур $T = \overline{T} + t$, а скорость в виде $U_k = \overline{U}_k + u_k$ получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial t}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial t}{\partial x_k} = \\ a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} + a \frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2}\end{gathered} \tag{7}$$

Для замыкания уравнений получим уравнение для турбулентных потоков тепла $\overline{tu_i}$. Для этого из уравнения (7) вычтем уравнение тогда получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial t}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k t - \overline{u_k t}\right) + a\frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2} \qquad (8)$$

запишем аналогичное уравнения для пульсации скорости $\overline{u_i}$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k u_i - \overline{u_k u_i}\right) = \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\end{gathered} \qquad (9)$$

Теперь умножим уравнения (8) на u_i, а уравнения (9) на t и сложим их. После осреднения этого уравнения получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial \tau} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u_k t}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} = -\left(\overline{u_i \frac{\partial u_k t}{\partial x_k} + t\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k}}\right) \\ -\frac{1}{\rho}\overline{t\frac{\partial P}{\partial x_k}} + \nu t\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + a u_i \overline{\frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2}}\end{gathered} \qquad (10)$$

Преобразуем уравнение (1.16) (10) используя соотношения

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_k} u_k t + t\frac{\partial}{\partial x_k} u_k u_i = \frac{\partial}{\partial x_k} u_k u_i t$$

$$t\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + u_i \frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i t - 2\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ ,$$

$$-t\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_k} pt + p\frac{\partial t}{\partial x_k}$$

Окончательно будем иметь следующие уравнения для корреляции $\overline{tu_i}$

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial \tau} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial x_k}}_{I} + \underbrace{\overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u_k t}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{II} =$$

$$
=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\frac{\overline{\partial u_i t}}{\partial x_k}-\underbrace{\overline{u_i u_k t}-\overline{\frac{p}{\rho}t}}_{III}\right]+\underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial t}{\partial x_i}}}_{IV}-\underbrace{2a\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{V} \qquad (11)
$$

В этих уравнениях два первых члена характеризуют полное изменение в единицу времени пульсационного потока тепла, третий член - непосредственное порождение $\overline{u_i t}$ из среднего температурного поля, четвертый - производство пульсационного теплового потока за счет взаимодействия пульсационного движения и среднего течения, последующие члены определяют молекулярную диффузию, изменение $\overline{u_i t}$ за счет внешних сил и диффузию за счет турбулентного переноса энергии пульсационного движения.

Получим теперь уравнения осредненного квадрата пульсации температуры. Для этого умножим уравнение пульсации температуры на t и произведем осреднение

$$
\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{t^2}{2}+U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{t^2}{2}+u_k t\frac{\partial T}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k t-\overline{u_k t}\right)=at\overline{\frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2}} \qquad (12)
$$

Используя соотношение

$$
\overline{2t\frac{\partial}{\partial x_k}u_k t}=\frac{\partial}{\partial x_k}u_k t^2
$$

$$
2t\frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}t^2-2\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}}
$$

Получим из (12) искомое уравнение

$$
\frac{\partial \bar{t}^2}{\partial \tau}+U_k\frac{\partial \bar{t}^2}{\partial x_k}+2\overline{u_k t}\frac{\partial T}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a\frac{\partial \bar{t}^2}{\partial x_k}-\overline{u_k t^2}\right]-2a\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} \qquad (13)
$$

Это уравнение выражает баланс между полным изменением величины $\overline{t^2}$ в единицу времени , ее созданием за счет взаимодействия между средним и пульсационным характеристиками температурного поля , молекулярной и турбулентной диффузией, уменьшением за счет термического сопротивления среды (диссипация).

Таким же методом можно получить уравнения для турбулентного переноса концентрации

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial \tau} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k}}_{I} \underbrace{+ \overline{u_i u_k} \frac{\partial Q}{\partial x_k} + \overline{u_k q} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{II} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{d \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k q} - \overline{\frac{p}{\rho} q}}_{III} \right] + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial q}{\partial x_i}}}_{IV} \underbrace{- 2d \overline{\frac{\partial q}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{V} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \overline{q}^2}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{q}^2}{\partial x_k} + 2\overline{u_k q} \frac{\partial Q}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[d \frac{\partial \overline{q}^2}{\partial x_k} - \overline{u_k q^2} \right] - 2d \overline{\frac{\partial q}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_k}} \qquad (15)$$

Из выполненного выше анализа следует, что в уравнение для момента любого порядка входят корреляции более высокого порядка. Следовательно, для точного описания поля турбулентного течения необходима бесконечная система уравнений, содержащая бесконечное число корреляционных функций. Поэтому в практических методах расчета для замыкания такой системы уравнений требуется обращение к эмпирическим данным.